المتسلسلات:

تمرين1:

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ وفي حال تقاربها, أوجد مجموعها.

الحل:

لدينا: $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

نضرب الطرفين بـ q نجد:

$$q\ S_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

$$(1-q)\ S_n = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} q^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \begin{cases} +\infty & , \ |q|>1 \\ 0 & , \ |q|<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} +\infty & , \ |q|>1 \\ \frac{1}{1-q} & , \ |q|<1 \end{cases}$$

فالمتسلسلة متقاربة عندما $|q|<1$.

مثال1:

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{6}\right)^n$.

الحل:

$$q=\frac{i}{6} \Longrightarrow |q|=\left|\frac{i}{6}\right|=\frac{1}{6}<1$$

فالمتسلسلة المعطاة متقاربة ومجموعها:

$$s=\frac{1}{1-\frac{i}{6}}=\frac{6}{6-i}=\frac{6(6+i)}{37}=\frac{36}{37}+i\frac{6}{37}$$

الاختبارات:

اختبار نهاية النسبة:

في هذا الاختبار نأخذ النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$.

ونحصل على الحالات التالية:

1- عندما $\ell>1$ تكون المتسلسلة متباعدة.
2- عندما $\ell<1$ تكون المتسلسلة متقاربة.
3- عندما $\ell=1$ حالة شك.

اختبار الجذر النوني: (كوشي).

في هذا الاختبار نأخذ النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\ell$.

وندرس التقارب وفق الحالات السابقة نفسها (كما في اختبار نهاية النسبة).

مثال2: (على حالة الشك).

لو أخذنا المتسلسلة $\sum\frac{1}{n}$, وأوجدنا النهاية في كلا الاختبارين, نجد أن: $\ell=1$.

ونحن نعلم أن هذه المتسلسلة متباعدة.

كذلك الأمر لو أخذنا المتسلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$, وأوجدنا النهاية في كلا الاختبارين, نجد أن: $\ell=1$.

ونحن نعلم أن هذه المتسلسلة متقاربة.

– أي أن كون النهاية تساوي الواحد في كلا المثالين السابقين لم تقتضي أن تكون المتسلسلة متقاربة أو متباعدة, ومن هنا تأتي حالة الشك.

تمرين2:

ادرس تقارب كل من السلاسل التالية:

1-) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

الحل1:

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{n!}{(n+1)^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)^n} . \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

فالمتسلسلة متقاربة.

2-) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}+2i}{1+4i}\right)^n$

الحل2:

هذه المتسلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ وهنا: $q = \frac{\sqrt{3}+2i}{1+4i}$:

$$\left|\frac{\sqrt{3}+2i}{1+4i}\right| = \frac{\left|\sqrt{3}+2i\right|}{|1+4i|} = \sqrt{\frac{7}{15}} < 1$$

ولما كان $|q|<1$ تقتضي أن المتسلسلة متقاربة, نجد أن المتسلسلة المعطاة في هذا التمرين متقاربة, ومجموعها يعطى:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}+2i}{1+4i}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}+2i}{1+4i}}=\frac{1+4i}{\left(1-\sqrt{3}\right)-2i}$$

3- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3+i)^n}{n!}$

<u>الحل3:</u>

$$a_{n+1}=\frac{(3+i)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(3+i)(3+i)^n}{(n+1)n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(3+i)(3+i)^n}{(n+1)n!}\cdot\frac{n!}{(3+i)^n}=\frac{3+i}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

فالمتسلسلة متقاربة.

<u>نشر تايلور: (في جوار نقطة تحليلية).</u>

الهدف من النشر كتابة أي دالة $f(z)$ على شكل سلسلة قوى كالتالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad , \quad |z-z_0|<\delta$$

وذلك لتسهيل دراسة الدالة.

مثال3:

إن نشر تايلور للدالة $f(z)=5+z+z^2$ على النطاق: $|z|<\infty$ هو الدالة نفسها.

كما أن نشر تايلور للدالة $f(z)=z^2-14z+50$ على النطاق: $|z-7|<\infty$ هو الدالة: $f(z)=(z-7)^2+1$.

حيث أن $f(z)$ تكتب كالتالي:

$$f(z)=z^2-14z+50=z^2-14z+49+1=\left(z^2-14z+49\right)+1=(z-7)^2+1$$

يعطى منشور تايلور لدالة تحليلية على النطاق $|z-z_0|<\delta$ على الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

مثال4:

أوجد منشور تايلور للدالة $f(z)=e^z$ على النطاق: $|z|<\infty$.

الحل:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[e^z\right]_{z=0}^{(n)}}{n!}(z)^n \qquad =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

مثال5:

أوجد منشور تايلور للدالة $f(z)=z^2+1$ على النطاق: $|z-1|<\infty$.

الحل:

$f(1)=2.$

$f'(z)=2z \Rightarrow f'(1)=2.$

$f''(z)=2 \Rightarrow f''(1)=2.$

$f^{(i)}(z)=0 \;,\; i>2 \;\Rightarrow f^{(i)}(1)=0.$

$\Rightarrow$

$f(z)=2+2(z-1)+(z-1)^2+0+0+0+\ldots$

$f(z)=2+2(z-1)+(z-1)^2.$

وهو النشر المطلوب.

مثال6:

أوجد نشر تايلور للدالة $|z|<1$, $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

الحل:

نحن نعلم أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad , \quad |z|<1. \Rightarrow f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

ملاحظة:

متسلسلة القوى قابلة للمكاملة حدّاً حدّاً, كما أنها قابلة للاشتقاق حدّاً حدّاً.

تمرين3:

أوجد نشر تايلور لكل من الدوال التالية:

1-) $f_1(z)=\frac{z}{z+1}$.

حل1:

$$f_1(z)=\frac{z+1-1}{1+z}=1-\frac{1}{1+z}=1-\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$$

بطريقة أخرى:

$$f_1(z)=\frac{z}{1+z}=z\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\right)=z\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n+1} \quad , \quad |z|<1\Rightarrow|-z|<1.$$

2-) $f_2(z)=\frac{1}{1+z^2}$.

حل2:

$$f_2(z)=\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

حيث أن:

$$|z|<1\Rightarrow\left|z^2\right|<1\Rightarrow\left|-z^2\right|<1.$$

3-) $f_3(z)=\dfrac{1}{(1-z^2)}$.

حل3:

$$f_3(z)=\frac{1}{1-z^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

4-) $f_4(z)=\ln(1+z)$.

حل4:

$$f_4(z)=\ln(1+z)=\int_0^z\frac{dz}{1+z}=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}$$

5-) $f_5(z)=arctag(z)$.

حل5:

$$f_5(z)=arctag(z)=\int_0^z\frac{dz}{1+z^2}=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^z z^{2n}dz$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}z^{2n+1}$$

6-) $f_6(z)=arcth(z)$.

حل6:

$$f_6(z)=arcth(z)=\ln\frac{1+z}{1-z}=\ln|1+z|-\ln|1-z|=\int_0^z\frac{dz}{1+z}+\int_0^z\frac{dz}{1-z}$$

$$=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n dz+\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-1)^n z^n+z^n dz$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}\left((-1)^n+1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}2\left(\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

تمرين4:

أنشر الدالة $f(z)=\frac{1}{(3-z)(z+4)}$ وذلك على النطاق: $|z|<3$.

الحل:

حتى ننشر هذا الكسر نقوم بتفريقه أولاً إلى مجموع كسرين بسيطين:

$$f(z)=\frac{1}{(3-z)(z+4)}=\frac{A}{3-z}+\frac{B}{z+4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z+4}=A+\frac{B(3-z)}{z+4} \Rightarrow z=3 \rightarrow A=\frac{1}{7} \\ \frac{1}{3-z}=B+\frac{A(z+4)}{3-z} \Rightarrow z=-4 \rightarrow B=\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$f(z)=\frac{\frac{1}{7}}{3-z}+\frac{\frac{1}{7}}{z+4}$$

لدينا:

$$|z|<3 \Rightarrow |z|<4 \Rightarrow \left|\frac{z}{4}\right|<1 \Rightarrow$$

$$f(z)=\frac{1}{21}.\frac{1}{1-\frac{z}{3}}+\frac{1}{28}.\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{4}\right)}=\frac{1}{21}.\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n+\frac{1}{28}.\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{21(3)^n}+\frac{(-1)^n}{28(4)^n}\right)z^n$$

تمرين5:

أوجد نشر تايلور للدالة $|z-5|<1 \quad , \quad f(z)=\dfrac{z-5}{6-z}$.

<u>الحل:</u>

لنفرض أن $u=z-5$ عندئذٍ يكون: $z=u+5$.

وبإجراء التعويض في الدالة المعطاة نجد:

$$f(z)=\frac{u}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-5)^{n+1}$$

تذكرة:

$$f(z)=e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}$$

تمرين6:

أوجد منشورات الدوال: $\cos(z) \; , \; \sin(z) \; , \; ch(z) \; , \; sh(z)$ على النطاق: $|z|<\infty$

<u>الحل:</u>

$$sh(z)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n}}{n!}-\frac{(-1)^{n}z^{n}}{n!}\right)\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^{n}}{n!}\right)z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$ch(z)=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n}}{n!}+\frac{(-1)^{n}z^{n}}{n!}\right)\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^{n}}{n!}\right)z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2n!}$$

$$\cos(z) = ch(iz) \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!}$$

$$\sin(z) = (-\cos z)' \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

تطبيق:

أنشر الدالة $f(z) = e^z$ على النطاق: $|z-2| < \infty$.

الحل:

$$f(Z) = \frac{e^2 . e^z}{e^2} = e^2 . e^{z-2} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 (z-2)^n}{n!}$$

نشر لورانت:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

$$= \quad ..... + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + ... + \frac{b_1}{(z-z_0)^1} + a_0 + a_1 (z-z_0) + ... + a_n (z-z_0)^n + ...$$

ملاحظة:

ينقسم نشر لورانت إلى مجموع قسمين هما:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ وهو القسم التحليلي من نشر لورانت.

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$ وهو القسم الرئيسي من نشر لورانت.

تمرين1:

أوجد نشر لورانت على النطاق $0 < |z-\pi| < \infty$ للدالة: $f(z) = \dfrac{2\cos z + 1}{z - \pi}$

الحل:

نحيط النقطة $z=\pi$ بدائرتين C_1, C_2 متحدتين بالمركز $z=\pi$, ونصفي قطريهما r_1, r_2 على الترتيب بحيث يكون $0<r_2<|z-\pi|<r_1<\infty$ وبالتالي تكون الدالة $f(z)$ دالة تحليلية على C_1, C_2 وعلى النطاق المحصور بينهما, وبالتالي واعتماداً على مبرهنة لورانت يكون للدالة $f(z)$ التمثيل التالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}$$

حيث :

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z)}{(z-\pi)^{-n+1}}dz \;\;;\;\; n=1,2,3,....$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{(z-\pi)^{n+1}}dz \;\;;\;\; n=1,2,3,....$$

لنوجد القسم الرئيسي:

$$b_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\frac{2\cos z+1}{z-\pi}}{(z-\pi)^0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{2\cos z+1}{z-\pi}dz=(2\cos z+1)_{z=\pi}=-1$$

$$b_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\frac{2\cos z+1}{z-\pi}}{(z-\pi)^{-1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}(2\cos z+1)dz=0$$

$$b_3=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\frac{2\cos z+1}{z-\pi}}{(z-\pi)^{-2}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}(z-\pi)(2\cos z+1)=0$$

.
.
.

$$b_n=0 \;\;;\;\; n\geq 2$$

إذاً نجد أن b_1 هي القيمة الوحيدة الغير معدومة من قيم القسم الرئيسي.

ولنحسب الآن القسم التحليلي:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{2\cos z+1}{z-\pi}}{(z-\pi)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{2\cos z+1}{(z-\pi)^2}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2\pi i}{1!}(2\cos z+1)'_{z=\pi}\right] = [-2\sin z]_{z=\pi} = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{2\cos z+1}{z-\pi}}{(z-\pi)^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{2\cos z+1}{(z-\pi)^3}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2\pi i}{2!}(2\cos z+1)''_{z=\pi}\right] = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{2\cos z+1}{z-\pi}}{(z-\pi)^3}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{2\cos z+1}{(z-\pi)^4}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2\pi i}{3!}(2\cos z+1)'''_{z=\pi}\right] = 0$$

.
.
.

مما سبق نجد أن $f(z)$ يأخذ التمثيل:

$$f(z)=\frac{-1}{(z-\pi)}+\frac{2}{2!}(z-\pi)-\frac{2}{4!}(z-\pi)^3+\frac{2}{6!}(z-\pi)^5 \quad ....$$

الحل بطريقة ثانية:

نحن نعلم:

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+..........$$

وبالتالي:

$$\cos z=-\cos(z-\pi)$$

$$=-\left[1-\frac{(z-\pi)^2}{2!}+\frac{(z-\pi)^4}{4!}-\frac{(z-\pi)^6}{6!}+....\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$2\cos z+1=-1+\frac{2}{2!}(z-\pi)^2-\frac{2}{4!}(z-\pi)^4+\frac{2}{6!}(z-\pi)^6-...$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{2\cos z+1}{(z-\pi)}=\frac{-1}{(z-\pi)}+\frac{2}{2!}(z-\pi)-\frac{2}{4!}(z-\pi)^3+\frac{2}{6!}(z-\pi)^5-...$$

تمرين2:

أوجد الحدود الأربعة الأولى من نشر لورانت على النطاق $0<|z|<\infty$ للدالة:

$$f(z)=\frac{e^z}{z(1+z^2)}$$

الحل:

نحيط النقطة $z=0$ بدائرتين C_1,C_2 متحدتين بالمركز $z=0$, ونصفي قطريهما r_1,r_2 على الترتيب بحيث يكون $0<r_2<|z|<r_1<\infty$ وبالتالي تكون الدالة $f(z)$

دالة تحليلية على C_1, C_2 وعلى النطاق المحصور بينهما, وبالتالي واعتماداً على مبرهنة لورانت يكون للدالة $f(z)$ التمثيل التالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}$$

نوجد القسم الرئيسي:

$$b_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z)}{z^0}dz\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\frac{e^z}{1+z^2}}{z}dz=\left[\frac{e^z}{1+z^2}\right]_{z=0}=1$$

$$b_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\frac{e^z}{z(1+z^2)}}{z^{-1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\not{z}\,\frac{e^z}{\not{z}(1+z^2)}dz=0$$

الدالة تحليلية تكاملها على كفاف مغلق معدوم

$$b_3=b_4=0$$

نوجد القسم التحليلي:

$$a_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\frac{e^z}{1+z^2}}{z^2}dz=\frac{1}{1!}\left[\left(\frac{e^z}{1+z^2}\right)'\right]_{z=0}=1$$

$$a_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z^2}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\frac{e^z}{1+z^2}}{z^3}dz=\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{e^z}{1+z^2}\right)''\right]_{z=0}=-\frac{1}{2}$$

.
.
.

وهكذا, بالتالي نجد:

$$f(z)=\frac{1}{z}+1-\frac{1}{2}z^{2}+\frac{5}{6}z^{3}+.....$$

تمرين3:

أوجد نشر لورانت على النطاق $0<|z|<\infty$ للدالة: $f(z)=\frac{1-\cos 2z}{z^{3}}$

الحل:

نحيط النقطة $z=0$ بدائرتين C_1,C_2 متحدتين بالمركز $z=0$, ونصفي قطريهما r_1,r_2 على الترتيب بحيث يكون $0<r_2<|z|<r_1<\infty$ وبالتالي تكون الدالة $f(z)$ دالة تحليلية على C_1,C_2 وعلى النطاق المحصور بينهما, وبالتالي واعتماداً على مبرهنة لورانت يكون للدالة $f(z)$ التمثيل التالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}$$

نوجد القسم الرئيسي:

$$b_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\frac{1-\cos 2z}{z^3}}{z^0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{1-\cos 2z}{z^3}dz=\frac{1}{2!}\left[(1-\cos 2z)''\right]_{z=0}$$

$$=\frac{1}{2!}(4\cos 2z)_{z=0}=2$$

$$b_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\frac{1-\cos 2z}{z^3}}{z^{-1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{1-\cos 2z}{z^2}dz=\frac{1}{1!}\left[(1-\cos 2z)'\right]_{z=0}$$

$$=\frac{1}{1!}(2\sin 2z)_{z=0}=0$$

$$b_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{1-\cos 2z}{z^3}}{z^{-2}} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{1-\cos 2z}{z} dz = (1-\cos 2z)_{z=0} = 0$$

$$b_4 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \overbrace{(1-\cos 2z)}^{\text{دالة تحليلة}} dz = 0$$

نوجد القسم التحليلي:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{1-\cos 2z}{z^3}}{z} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{1-\cos 2z}{z^4} dz = \frac{1}{3!}\left[(1-\cos 2z)^{\backslash\backslash\backslash}\right]_{z=0}$$

$$= \frac{1}{3!}(-8\sin 2z)_{z=0} = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{1-\cos 2z}{z^3}}{z^2} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{1-\cos 2z}{z^5} dz = \frac{1}{4!}\left[(1-\cos 2z)^{(4)}\right]_{z=0}$$

$$= \frac{1}{4!}(-16\cos 2z)_{z=0} = \frac{-16}{4!}$$

وهكذا, نجد أن الدالة $f(z)$ تأخذ الشكل:

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{16}{4!}z + \frac{64}{6!}z^3 + ... \quad ; \quad 0 < |z| < \infty$$

تمرين4:

أوجد منشور لورانت على النطاق $0 < |z-3| < \infty$ للدالة: $f(z) = \dfrac{-2}{3-z}$

الحل:

نحيط النقطة $z=3$ بدائرتين C_1, C_2 متحدتين بالمركز $z=3$, ونصفي قطريهما r_1, r_2 على الترتيب بحيث يكون $0<r_2<|z-3|<r_1<\infty$ وبالتالي تكون الدالة $f(z)$ دالة تحليلية على C_1, C_2 وعلى النطاق المحصور بينهما, وبالتالي واعتماداً على مبرهنة لورانت يكون للدالة $f(z)$ التمثيل التالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

لنوجد القسم الرئيسي:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{-2}{3-z}}{(z-3)^0} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{2}{z-3}\, dz = [2]_{z=3} = 2$$

.
.
.

$$b_n = 0 \ ; \ n \geq 2$$

لنوجد القسم التحليلي:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{-2}{3-z}}{(z-3)^{1+n}}\, dz = \frac{1}{(n+1)!}(2)^{(n+1)}_{z=3} = 0 \ ; \ n = 0,1,2,3,....$$

وبالتالي نجد $f(z)$:

$$f(z) = \frac{2}{z-3} \ ; \ 0<|z-3|<\infty$$

تمرين5:

أوجد القسم الرئيسي من مفكوك لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{shz-1}{z(z-1)}$ وذلك على النطاق: $0<|z|<\infty$.

الحل:

نحيط النقطة $z=0$ بدائرتين C_1,C_2 متحدتين بالمركز $z=0$, ونصفي قطريهما r_1,r_2 على الترتيب بحيث يكون $0<r_2<|z|<r_1<\infty$ وبالتالي تكون الدالة $f(z)$ دالة تحليلية على C_1,C_2 وعلى النطاق المحصور بينهما, وبالتالي واعتماداً على مبرهنة لورانت يكون للدالة $f(z)$ التمثيل التالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}$$

لنوجد القسم الرئيسي من هذا المنشور:

$$b_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\frac{shz-1}{z(z-1)}}{z^0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\frac{shz-1}{z-1}}{z}dz=\left[\frac{shz-1}{z-1}\right]_{z=0}=1$$

$$b_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\overbrace{\frac{shz-1}{z-1}}^{\text{تكامل دالة تحليلية على كفاف مغلق}}dz=0$$

وبالتالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}=\frac{1}{z^{-1}}=z$$

وهو القسم الرئيسي من منشور لورانت.

جداء السلاسل وقسمتها:

لتكن لدينا متسلسلتي القوى التاليتين: $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ و $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$.

لو طلب منا منشور الدالة: $f(z).g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$.

$$c_0 = a_0 . b_0$$
$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$$
$$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$
$$c_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3$$
......
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

ولو طلب منا حساب منشور الدالة: $\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) \Rightarrow$$

$$a_0 = b_0 c_0 \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{b_0}$$
$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{a_1 - b_1 c_0}{b_0}$$
$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 \Rightarrow c_2 \frac{a_2 - b_2 c_0 - b_1 c_1}{b_0}$$
.....

ملاحظة:

لو كان لدينا دالة $f(z)$ بحيث $z = z_0$ هو صفر من الدرجة m للدالة $f(z)$.
أي أن: $f(z_0) = 0$ كما أن المشتقات حتى المرتبة $m-1$ تكون معدومة عند $z = z_0$ والمشتقة من المرتبة m تكون أول مشتقة غير معدومة عند هذه النقطة.

تمرين1:

أوجد منشور لورانت للدالة $f(z) = \tan z$ على النطاق $0 < |z| < \infty$. ثم استنتج نشر لورانت للدالة $g(z) = \tan^2 z$ على نفس النطاق الحلقي.
أوجد أصفار كل من الدالتين $g(z)$ و $f(z)$

الحل:

$$f(z)=\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(n+1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n!}}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots}{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

$$c_0=\frac{a_0}{b_0}=\frac{0}{1}=0$$

$$c_1=\frac{a_1-b_1c_0}{b_0}=\frac{1-0}{1}=1$$

$$c_2=\frac{a_2-b_2c_0-b_1c_1}{b_0}=\frac{0-1\times 0-0}{1}=0$$

$$c_3=\frac{a_3-b_3c_0-b_2c_1-b_1c_2}{b_0}=\dots=\frac{1}{3}$$

$$c_4=\frac{a_4-b_4c_0-b_3c_1-b_2c_2-b_1c_3}{b_0}=\dots=0$$

هنا كل المعاملات الزوجية معدومة, لأن الدالة $f(z)$ هي قسمة دالة فردية على دالة زوجية.

أي أنها دالة فردية, وبالتالي جميع المعاملات الزوجية تكون معدومة.

بالمتابعة نجد:

$$c_5=\frac{2}{15}\qquad ;\qquad c_7=\frac{17}{315}\qquad \dots\dots$$

وبالتالي:

$$f(z)=\tan z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\dots\dots$$

ولإيجاد منشور الدالة $g(z)=\tan^2 z$ نكتب:

$$(\tan z)'=1+\tan^2 z\Rightarrow$$

$$g(z)=\tan^2 z=(\tan z)'-1=\left[z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\dots\right]'-1$$

$$=z^2+\frac{2}{3}z^4+\frac{17}{45}z^6+\dots$$

إن أصفار الدالة $f(z)$ هي جذور المعادلة $f(z)=0$:

$$\tan z = 0 \Leftrightarrow z = \pi k \;\; , \;\; k = 0,\pm 1,\pm 2,....$$

$$f(\pi k) = 0 \;\; , \;\; f'(\pi k) = 1 + \tan^2(\pi k) = 1 \neq 0$$

إذاً هي أصفار من الدرجة الأولى للدالة $f(z)$.

و أصفار من الدرجة الثانية بالنسبة للدالة $g(z)$.

ملاحظة:

إذا كان $z = z_0$ صفر من الدرجة m للدالة $f(z)$.

فعندئذٍ $z = z_0$ صفر من الدرجة $m \times n$ للدالة $f^n(z)$.

تمرين2:

اعتماداً على مفهوم ضرب وقسمة السلاسل, أوجد الجذور الأربعة الأولى من نشر الدالة:

$$f(z) = \frac{e^z}{z(1+z^2)} \quad ; \quad 0 < |z| < 1$$

الحل:

تعلم أن نشر الدالة e^z يكتب بالشكل: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{e^z}{(1+z^2)}=\frac{1}{z}\left[\frac{1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\ldots}{1+z^2}\right]=\frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\right];$$

$$c_0=\frac{a_0}{b_0}=\frac{1}{1}=1$$

$$c_1=\frac{a_1-b_1c_0}{b_0}=\frac{1-(0\times 1)}{1}=1$$

$$c_2=\ldots\ldots\ldots=-\frac{1}{2}$$

$$c_3=\ldots\ldots\ldots=-\frac{5}{6}$$

$$\ldots.\Rightarrow$$

$$f(z)=\frac{1}{z}\left[1+z-\frac{1}{2}z^2-\frac{5}{6}z^3-\ldots\right]=\frac{1}{z}+1-\frac{1}{2}z-\frac{5}{6}z^2-\ldots.$$

<u>الحل بطريقة أخرى:</u>

$$f(z)=\frac{1}{z}\left[e^z\left(\frac{1}{1-(-z^2)}\right)\right]=\frac{1}{z}\left[\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+..\right)\left(1-z^2+z^4-z^6+..\right)\right]$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\ ;$$

$$c_0=a_0b_0=1\times 1=1$$

$$c_1=a_0b_1+b_0a_1=1$$

$$c_2=a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2=-\frac{1}{2}$$

$$\ldots\Rightarrow$$

$$f(z)=1+z-\frac{1}{2}z^2-\frac{5}{6}z^3-\ldots$$

تمرين3: (وظيفة)

أوجد منشور الدالة $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ على النطاق $0<|z|<\infty$.

تمرين4:

أوجد نشر لورانت لكل من الدوال التالية:

$$f(z)=\frac{\sin 3z}{z^3}\quad ;\quad 0<|z|<\infty$$

$$g(z)=z^3.e^{\frac{1}{z}}\quad ;\quad 0<|z|<\infty$$

<u>الحل:</u>

$$\sin(2z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}\Rightarrow$$

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2)^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n-2}$$

بالنسبة لـ $g(z)$:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Rightarrow e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z)^n}\quad ;\quad 0<|z|<\infty$$

$$\Rightarrow$$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3-n}}{n!}=z^3+\frac{1}{1!}z^2+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^2}+\ldots\ldots$$

تمرين5:

أوجد جميع أصفار الدالة: $f(z)=\left(1-e^z\right)^2\left(z^2-9\right)^3\left(\cos z-2\right)$.

ثم أوجد درجة كل صفر.

الحل:

$$f(z)=0 \Rightarrow$$
$$\left(1-e^{z}\right)^{2}=0 \Rightarrow e^{z}=1 \Rightarrow z=2n\pi i$$
$$or\ \left(z^{2}-9\right)^{3}=0 \Rightarrow z^{2}-9=0 \Rightarrow z=\pm 3$$
$$or\ \cos z=2 \Rightarrow z=2n\pi+i\ \log\left(2\pm\sqrt{3}\right)$$

بما أن الجذور $z=2n\pi i$ هي أصفار من الدرجة الأولى للدالة $\left(1-e^{z}\right)$ فهي أصفار من الدرجة الثانية للدالة $\left(1-e^{z}\right)^{2}$ وبالتالي فهي أصفار من الدرجة الثانية للدالة $f(z)$. وذلك كون الدالة $\left(z^{2}-9\right)^{3}(\cos z-2)$ لا تنعدم عند هذه الأصفار.

كما أن $z=\pm 3$ هي أصفار من الدرجة الأولى للدالة $\left(z^{2}-9\right)$وبالتالي فهي أصفار من الدرجة الثالثة للدالة $\left(z^{2}-9\right)^{3}$ وبالتالي فهي أصفار من الدرجة الثالثة للدالة $f(z)$ وذلك كون الدالة $\left(1-e^{z}\right)^{2}(\cos z-2)$ لا تنعدم عند هذه الأصفار.

كما أن $z=2n\pi+i\log(2\pm\sqrt{3})$ فهي أصفار من الدرجة الأولى للدالة $f(z)$ وذلك كون الدالة $\left(1-e^{z}\right)^{2}\left(z^{2}-9\right)^{3}$ لا تنعدم عند هذه الأصفار.

تمرين6:

عين جميع أصفار الدالة $f(z)=\sin 3z-3\sin z$.

الحل:

$$f(z)=3\sin z-4\sin^{3} z-3\sin z=-4\sin^{3} z$$
$$f(z)=0 \Leftrightarrow \sin^{3} z=0 \Leftrightarrow \sin z=0 \Leftrightarrow z=\pi k\ ;\ k=0,\pm 1,\pm 2,...$$
$$\left[f'(z)\right]_{z=\pi k}=\left(\cos(\pi k)\right)=\pm 1\neq 0$$

إذاً $z=\pi k$ هي أصفار من الدرجة الأولى للدالة $\sin z$.

إذاً هي أصفار من الدرجة الثالثة للدالة $f(z)$.

تمرين7:

أوجد أصفار الدالة $f(z)=z.\sin z$

الحل:

$$f(z)=0 \Leftrightarrow z.\sin z=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} z=0 \\ z=\pi k \;;\; k=0,\pm1,\pm2,... \end{matrix}\right\}$$

$$f'(z)=\sin z+z\cos z$$

$$f'(0)=0 \;;\; f'(\pi k)=\pm\pi k \;;\; k=\pm1,\pm2,...$$

وبالتالي فإن الأصفار $z_k=\pi k$ هي أصفار من الدرجة الأولى حيث: $k=\pm1,\pm2,..$

$$f''(z)=\cos z+\cos z-z\sin z \Rightarrow f''(0)=2\neq 0$$

إذاً $z=0$ صفر من الدرجة الثانية.

تمرين:

أنشر الدالة $f(z)=e^z\left(z^3-1\right)$ بجوار النقطة $z=1$, اعتماداً على مفهوم جداء السلاسل.

<u>الحل:</u>

الدالة $f(z)$ عبارة عن جداء الدالتين $g(z)=e^z$ و $h(z)=z^3-1$.

ولنوجد منشور كل منهما بجوار النقطة $z=1$:

$$e^z=e^{z-1+1}=e.e^{z-1}=e\left[1+(z-1)+\frac{1}{2!}(z-1)^2+\frac{1}{3!}(z-1)^3+...\right]$$

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=(z-1)(z-2z+3z+1)=$$

$$=(z-1)\left[(z-1)^2+3(z-1)^1+3\right]=(z-1)^3+3(z-1)^2+3(z-1)$$

واعتماداً على مفهوم جداء السلاسل نكتب الدالة بالشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-1)^n$$

$$\left.\begin{matrix} a_n=\dfrac{e}{n!} \;;\; n=0,1,2,3,..... \\ b_0=0 \;,\; b_1=3 \;,\; b_2=3 \;,\; b_3=1 \;,\; b_n=0 \;;\; n\geq 4 \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow$

$$c_0 = a_0.b_0 = \frac{e}{0!}\times 0 = e\times 0 = 0$$

$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = \frac{e}{1!}\times 0 + \frac{e}{0!}\times 3 = 0 + 3 = 3e$$

$$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = \frac{e}{2!}\times 0 + \frac{e}{1!}\times 3 + \frac{e}{0!}\times 3 = 3 + 3 = 6e$$

$$c_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 = \ldots = \frac{11}{2}e$$

.
.
.

$$\Rightarrow f(z) = 3e(z-1) + 6e(z-1)^2 + \frac{11}{2}e(z-1)^3 + \ldots\ldots$$

تمرين:

اعتماداً على جداء السلاسل, أوجد منشور الدالة التالية: $h(z) = f(z).g(z)$. حيث:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad ; \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z+2}$$

الحل:

$$f(z) = -\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$$
$$= \frac{1}{z^3}\left[-1 + z - z^2 + z^3 - \ldots\right]$$

$\Rightarrow$

$$h(z) = -\frac{1}{z^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+2}\right)$$

ويمكن المتابعة بشكل مشابه لما سبق.

تمرين:

أوجد منشور الدالة $\sin\left(\frac{-z}{1-z}\right)$ في جوار $z=1$.

الحل:

$$\sin\left(\frac{-z}{1-z}\right)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin(1)\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)+\cos(1)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

$$=\sin(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}\frac{1}{(z-1)^{2n}}+\cos\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$

تعريف النقاط الشاذة:

نقول عن النقطة $z=z_0$ أنها نقطة شاذة للدالة $f(z)$ إذا كانت الدالة $f(z)$ غير تحليلية في هذه النقطة, وهي على نوعين:

1) نقاط شاذة معزولة.
2) نقاط شاذة غير معزولة.

النقطة الشاذة المعزولة وغير المعزولة:

نقول عن النقطة الشاذة $z=z_0$ أنها نقطة شاذة معزولة إذا وجد جوار لـ z_0 لا يحوي أي نقطة شاذة أخرى, وإلا فالنقطة $z=z_0$ نقطة شاذة غير معزولة.

مثال:

لتكن لدينا الدالة $f(z)=\frac{5z^2+6z}{(z^2-3z+2)(z-6)}$, أوجد النقاط الشاذة وحدد نوعها (معزولة أو غير معزولة) .

الحل:

هذه الدالة لها النقاط الشاذة التالية: $z=6, z=1, z=2$ وهي نقاط معزولة.

في حين لو أخذنا الدالة $g(z)=\log(z)$ عندئذٍ النقاط الشاذة لهذه الدالة هي النقاط:

$\left\{z=x+iy \;\; ; \;\; y=0 \;\; , \;\; x\leq 0\right\}$ وهي نقاط شاذة غير معزولة.

تصنيف النقاط الشاذة المعزولة:

لنعرف نوع النقطة الشاذة المعزولة للدالة $f(z)$ ندرس نهاية هذه الدالة عندما تسعى z نحو z_0 ونناقش الحالات الثلاث التالية:

الحالة الأولى:

إذا كانت $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A\neq\infty$ عندئذٍ $z=z_0$ هي نقطة شاذة معزولة قابلة للإصلاح لأننا نستطيع إصلاح الدالة بحيث تصبح معروفة عند $z=z_0$, ونضع $f(z_0)=A$

الحالة الثانية:

إذا كانت $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ عندئذٍ النقطة $z=z_0$ هي قطب.

الحالة الثالثة:

إذا كانت النهاية السابقة غير معينة (غير موجودة) , تسمي النقطة $z=z_0$ نقطة شاذة أساسية.

نقول عن $z=z_0$ أنها قطب من الرتبة n إذا كانت $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)=B\neq\infty$ و $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\infty\ ;\ m<n$.

مثال:

لتكن لدينا الدالة $f(z)=\dfrac{z^2-2z}{(z^2-3z+2)(z-6)}$. أوجد النقاط الشاذة لهذه الدالة ثم حدد نوعها.

الحل:

إن النقاط الشاذة لهذه الدالة هي أصفار الدالة $g(z)=(z^2-3z+2)(z-6)$ وبالتالي فإن النقاط الشاذة هي: $z=6, z=1, z=2$.

لتعيين نوع هذه النقاط.

1) $z=1$:

$\lim\limits_{z\to 1} f(z)=\dfrac{-1}{0}=\infty$ إذاً $z=1$ قطب, ولتحديد نوعه :

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\ f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z^2-2z}{(z^2-3z+2)(z-6)}=-\frac{1}{5}\neq\infty$$

إذاً $z=1$ قطب من المرتبة الأولى (قطب بسيط).

2) $z=2$:

$\lim_{z\to 2} f(z)=\frac{0}{0}$ عدم تعيين ,

نطبق قاعدة أوبيتال:

$$\lim_{z\to 2} f(z)=\lim_{z\to 2} f'(z)$$

$$=\lim_{z\to 2}\frac{2z-2}{(2z-3)(z-6)+(z^2-3z+2)}=\frac{2}{(1)(-4)+(0)}=\frac{-1}{2}$$

إذاً $z=2$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح. ونقوم بإصلاح الدالة بوضع $f(2)=-\frac{1}{2}$.

3) بالنسبة لـ $z=6$:

نلاحظ أن $z=6$ قطب من الدرجة الأولى (أثبت ذلك).

تمرين:

لتكن $n=1,2,3,...$; $f_n(z)=\frac{\sin z}{z^n}$ ناقش بحسب قيم n نوع النقطة الشاذة $z=0$.

<u>الحل:</u>

$$n=1\Rightarrow \lim_{z\to 0} f_1(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

إذاً $z=0$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f_1(z)$ أي عندما $n=1$ ونصلح هذه الدالة بأن نضع: $f(0)=1$.

$$n=2\Rightarrow \lim_{z\to 0} f_2(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\frac{1}{z}=\infty$$

إذاً $z=0$ هي قطب للدالة $f_2(z)$ وهو قطب من المرتبة الأولى, لأن:

$$\lim_{z\to 0} z.f_2(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

$$n=3 \Rightarrow \lim_{z\to 0} f_3(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\frac{1}{z^2}=\infty$$

إذاً $z=0$ قطب للدالة $f_3(z)$ وهو قطب من المرتبة الثانية لأن:

$$\lim_{z\to 0} zf_3(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\frac{1}{z}=\infty \quad , \quad \lim_{z\to 0} z^2 f_3(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1\neq\infty$$

وهكذا نجد أنه من أجل $n=k$ نجد $z=0$ هي قطب من المرتبة $k-1$.

مثال:

من أجل الدالة $f(z)=\cos\frac{1}{z}$ نجد أن النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ لأن:

النهاية $\lim_{z\to 0}\cos\left(\frac{1}{z}\right)=?$ غير موجودة.

تمرين1:

أوجد النقاط الشاذة للدالة : $f(z)=\frac{\cot z}{z^2}$ ثم حدد نوعها.

<u>الحل:</u>

النقاط الشاذة لهذه الدالة هي جذور المعادلة $z^2\sin z=0$ حيث أننا كتبنا الدالة $f(z)$ على الشكل التالي: $f(z)=\frac{\cos z}{z^2\sin z}$ وبالتالي فإن النقاط الشاذة لهذه الدالة هي:

$z=0$ و $z=n\pi\ ;\ n=\pm1,\pm2,...$ ولدراسة هذه النقاط:

من أجل $z=0$ نجد: $\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\cot z}{z^2}=\infty$ إذاً $z=0$ قطب للدالة $f(z)$ ولتحديد نوع هذا القطب:

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{z\ .\sin z}=\infty$$

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{\sin z}=\infty$$

$$\lim_{z\to 0} z^3 f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z.\cos z}{\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\times\lim_{z\to 0}\cos z=1\times1=1\neq\infty$$

إذاً $z=0$ هي قطب من الرتبة الثالثة للدالة $f(z)$.

كان بالإمكان تحديد نوع النقطة الشاذة $z=0$ بالطريقة التالية:

لنعتبر الدالة $g(z)=z^2.\sin z$, نلاحظ أن :

$$g(z)|_{z=0}=z^2.\sin z|_{z=0}=0$$
$$g'(z)|_{z=0}=\left(2z.\sin z+z^2\cos z\right)_{z=0}=0$$
$$g''(z)|_{z=0}=\left((2-z^2)\sin z+(4z)\cos z\right)_{z=0}=0$$
$$g'''(z)|_{z=0}=\left((6-z^2)\cos z-(6z)\sin z\right)_{z=0}=6\neq 0$$

إذاً $z=0$ هو صفر من الدرجة الثالثة للدالة $g(z)$ فهو قطب من الدرجة الثالثة للدالة $f(z)$ وذلك بعد أن نلاحظ أن $\cos z|_{z=0}=1\neq 0$.

يمكن تحديد نوع النقطة الشاذة $z=0$ عن طريق النشر كما سنرى في تمارين لاحقة.

أما بالنسبة للنقطة $z=n\pi$ حيث $n=\pm1,\pm2,...$ فنلاحظ أن:

$$\lim_{z\to n\pi} f(z)=\lim_{z\to n\pi}\frac{\cos z}{z^2.\sin z}=\infty$$

إذاً النقاط $z=n\pi$ حيث $n=\pm1,\pm2,...$ هي أقطاب للدالة $f(z)$. ولتحديد نوع هذه الأقطاب:

$$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)f(z)=\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)\frac{\cos z}{z^2.\sin z}=\frac{0}{0}?$$ عدم تعيين

$$=\lim_{z\to n\pi}\frac{\cos z-(z-n\pi)\sin z}{z^2\cos z+2z\sin z}=\frac{\cos(n\pi)}{(n\pi)^2\cos(n\pi)}=\frac{1}{(n\pi)^2}\neq\infty$$

إذاً النقاط $z=n\pi$ حيث $n=\pm1,\pm2,...$ هي أقطاب بسيطة للدالة $f(z)$.

تمرين2:

عين النقاط الشاذة للدالة $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$ وحدد نوعها باستخدام التعريف.

الحل:

إن النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي جذور المعادلة $z(z^2+1)=0$ وهي النقاط الشاذة :

$z=0$ و $z=i$ و $z=-i$

لتحديد أنواع هذه النقاط:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z(z^2+1)} = \infty$$

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z^2+1} = 1 \neq \infty$$

إذاً $z=0$ قطب بسيط للدالة $f(z)$.

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{e^z}{z(z^2+1)} = \infty$$

$$\lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{e^z}{z(z+i)} = \frac{e^i}{-2} \neq \infty$$

إذاً $z=i$ قطب بسيط للدالة $f(z)$.

$$\lim_{z\to -i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{e^z}{z(z^2+1)} = \infty$$

$$\lim_{z\to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{e^z}{z(z-i)} = \frac{e^{-i}}{2} \neq \infty$$

إذاً $z=-i$ قطب بسيط للدالة $f(z)$.

تمرين3:

أوجد النقاط الشاذة للدالة: $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{sh(z)}$.

الحل:

النقاط الشاذة هي جذور المعادلة $sh(z)=0$.

أي النقاط : $z=n\pi i$ حيث : $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$. ولنحدد أنواع هذه النقاط.

من أجل $z=0$ نلاحظ أن النقطة $z=0$ هي قطب للدالة $g(z)=\dfrac{1}{z}$ فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{z}}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$.

ومن أجل النقاط $z=n\pi i$ حيث $n=\pm1,\pm2,\ldots$ نجد :

إن هذه النقاط أصفار من الدرجة الأولى للدالة $sh(z)$ وبالتالي فهي أقطاب بسيطة للدالة $f(z)$ حيث أن $e^{\frac{1}{z}} \neq 0$ عندما $z=n\pi i$ و $n=\pm1,\pm2,\ldots$.

تمرين4:

أنشر الدالة $f(z) = z^2.\cos\dfrac{1}{z-2}$ في النطاق: $0 < |z-2| < \infty$.

ثم اعتمد على هذا النشر لمعرفة نوع النقطة الشاذة $z = 2$.تأكد من صحة الحل بطريقة أخرى.

الحل:

نفرض $z-2 = u \Rightarrow z = u+2$ وبالتالي:

$$f(u+2) = (u+2)^2\cos\left(\frac{1}{u}\right) = \left(u^2+4u+4\right)\left(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{u^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{u^4}-\ldots\right)$$

$$=\left(u^2-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}\frac{1}{u^2}-\ldots\right)+\left(4u-\frac{4}{2!}\frac{1}{u}+\frac{4}{4!}\frac{1}{u^3}-\ldots\right)+\left(4-\frac{4}{2!}\frac{1}{u^2}+\frac{4}{4!}\frac{1}{u^4}-\ldots\right)$$

$$=u^2+4u+\left(-\frac{1}{2!}+4\right)-\frac{4}{2!}\frac{1}{u}+\left(\frac{1}{4!}-\frac{4}{2!}\right)\frac{1}{u^2}+\ldots$$

$$=(z-2)^2+4(z-2)+\left(-\frac{1}{2!}+4\right)-\frac{4}{2!}\frac{1}{(z-2)}+\left(\frac{1}{4!}-\frac{4}{2!}\right)\frac{1}{(z-2)^2}+\ldots$$

وهو نشر لورانت للدالة $f(z)$ على النطاق المعطى.

بما أن الجزء الرئيسي من نشر لورانت للدالة $f(z)$ في جوار 2 يتكون من عدد غير منته من الحدود إذاً $z = 2$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$.

ويمكن الحل بطريقة أخرى على النحو التالي:

نستطيع كتابة الدالة $f(z)$ بالشكل $f(z) = \dfrac{z^2}{2}\left(e^{\frac{i}{z-2}}+e^{\frac{-i}{z-2}}\right)$ وبما أن $z = 2$ قطب للدالتين $\dfrac{-i}{z-2}$; $\dfrac{i}{z-2}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية لكل من الدالتين

$$\left(e^{\frac{i}{z-2}}\ ;\ e^{\frac{-i}{z-2}}\right)$$

وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$.

تمرين5:

أوجد النقاط الشاذة للدالة $f(z) = \dfrac{z+3}{(z-1)(z-2)^2}$ ثم اعتمد على نشر لورانت للدالة $f(z)$ في تحديد نوع هذه النقاط الشاذة.

الحل:

إن النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي جذور المعادلة : $(z-1)(z-2)^2=0$ وهي النقاط:
$z=1$ و $z=2$.

لنوجد منشور لورانت للدالة $f(z)$ في جوار ما للنقطة $z=1$, وليكن $|z-1|<1$.
ولهذا الغرض نكتب الدالة $f(z)$ بالشكل:

$$f(z)=\frac{4+(z-1)}{(z-1)[(z-1)-1]^2}=\frac{4+(z-1)}{(z-1)\left[1-2(z-1)+(z-1)^2\right]}$$

وبالتالي واعتماداً على قسمة السلاسل فإن الدالة تكتب على بالشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$$

حيث:

$$a_0=b_0.c_0 \Rightarrow 4=1.c_0 \Rightarrow c_0=4$$
$$a_1=b_0.c_1+b_1.c_0 \Rightarrow 1=1.c_1+(-2)(4) \Rightarrow c_1=8+1=9$$
$$a_2=b_0.c_2+b_1.c_1+b_2.c_0 \Rightarrow 0=1.c_2+(-2)(9)+(1)(4) \Rightarrow c_2=14$$
$$a_3=b_0.c_3+b_1.c_2+b_2.c_1+b_3.c_0 \Rightarrow 0=1.c_3+(-2)(14)+(1)(9)+0 \Rightarrow c_3=19$$
.
.
.

وبالتالي نجد:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)}\left[4+9(z-1)+14(z-1)^2+19(z-1)^3+\ldots\right]$$
$$=\left[\frac{4}{(z-1)}+9+14(z-1)\ \ +19(z-1)^2+\ldots\right]$$

بما أن الجزء الرئيسي للدالة $f(z)$ في جوار $z=1$ يتكون من حد واحد فقط إذاً $z=1$ هي قطب بسيط للدالة $f(z)$.

من أجل النقطة $z=2$, نلاحظ أن الدالة $f(z)$ تكتب على الشكل:

$$f(z)=\frac{(z-2)+5}{(z-2)^2[(z-2)+1]}=\frac{1}{(z-2)^2}\left[\frac{5+(z-2)}{1+(z-2)}\right]=$$
$$=\frac{1}{(z-2)^2}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$$

حيث:

$$a_0 = b_0.c_0 \Rightarrow 5 = 1.c_0 \Rightarrow c_0 = 5$$
$$a_1 = b_0.c_1 + b_1.c_0 \Rightarrow 1 = c_1 + 5 \Rightarrow c_1 = 1 - 5 = -4$$
$$a_2 = b_0.c_2 + b_1.c_1 + b_2.c_0 \Rightarrow 0 = c_2 + (-4) + 0 \Rightarrow c_2 = 4$$
$$a_3 = b_0.c_3 + b_1.c_2 + b_2.c_1 + b_3.c_0 \Rightarrow 0 = c_3 + 0 + (1)(4) + 0 + 0 \Rightarrow c_3 = -4$$

.
.
.

وبالتالي نجد :

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}\left[5 - 4(z-2) + 4(z-2)^2 - 4(z-2)^3 + \ldots\right]$$
$$= \frac{5}{(z-2)^2} - \frac{4}{(z-2)} + 4 - 4(z-2) + \ldots$$

بما أن الجزء الرئيسي للدالة $f(z)$ في جوار $z=2$ يتكون من حدين ودرجة أعلى حد هي 2 إذاً $z=2$ قطب من الرتبة الثانية للدالة $f(z)$.

تمرين6:

أوجد منشور الدالة : $f(z) = z + \sin\frac{1}{3z}$ في جوار $z=0$ ثم حدد نوع النقطة الشاذة $z=0$ بالنسبة للدالة $f(z)$.

الحل:

نحن نعلم أن :

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \ldots \;;\; 0 < |z| < \infty$$

وبالتالي وبتعويض كل z بـ $\frac{1}{3z}$ نجد:

$$\sin\frac{1}{3z} = \frac{1}{(3z)} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{(3z)^3} + \frac{1}{5!}\,\frac{1}{(3z)^5} - \frac{1}{7!}\,\frac{1}{(3z)^7} + \ldots \;;\; 0 < |z| < \infty$$

وبالتالي نجد الدالة $f(z)$:

$$f(z) = z + \sin\left(\frac{1}{3z}\right) = z + \frac{1}{(3z)} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{(3z)^3} + \frac{1}{5!}\,\frac{1}{(3z)^5} - \frac{1}{7!}\,\frac{1}{(3z)^7} + \ldots$$

بما أن الجزء الرئيسي للدالة $f(z)$ في جوار الصفر يتكون من عدد غير منته من الحدود إذاً النقطة $z=0$ نقطة شاذة أساسية للدالة.

ملاحظة:

إن هذا المنشور للدالة هو نفسه منشور الدالة في جوار اللانهاية. وواضح من هذا النشر أن الجزء التحليلي للدالة يتكون من عدد منه من الحدود ودرجة أعلى حد هي 1 . إذاً نقطة اللانهاية هي قطب بسيط للدالة $f(z)$.

ويمكننا الحصول على الحل بطريقة أخرى وذلك بإجراء التبديل $z=\frac{1}{t}$ فنحصل على الدالة:

$$\varphi(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}+\sin\frac{t}{3}$$

وبما أن النقطة $t=0$ قطب بسيط للدالة $\phi(t)$ إذاً $z=\infty$ هي قطب بسيط للدالة $f(z)$.

تمرين7:

عين جميع النقاط الشاذة للدالة $f(z)=\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{(\cos(2z)-1)^3}$ ثم حدد نوع هذه النقاط.

<u>الحل:</u>

نلاحظ أن الدالة $f(z)$ تكتب بالشكل: $f(z)=\dfrac{g_1(z)}{g_2(z)}$.

حيث أن:

$$g_1(z)=\sin(3z)-3\sin z$$

$$g_2(z)=(\cos(2z)-1)^3$$

إن النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي جذور المعادلة $g_2(z)=(\cos(2z)-1)^3=0$.

أي أصفار الدالة $g_2(z)$, وتمثلها النقاط التي تحقق:

$$\cos(2z)=1\Rightarrow 2z=2n\pi\Rightarrow z=n\pi\ ;\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

إن هذه النقاط هي أقطاب للدالة $f(z)$ لأن:

هذه النقاط هي أصفار من الدرجة الثانية للدالة $h(z)=\cos(2z)-1$ وذلك لأن :

$$h(z)|_{z=n\pi}=\cos(2n\pi)-1=0$$

$$h'(z)|_{z=n\pi}=-2\sin(2n\pi)=0$$

$$h''(z)|_{z=n\pi}=-4\cos(2n\pi)=-4\neq 0$$

إذاً $z=n\pi$ هي أصفار من الدرجة السادسة للدالة
. $g_2(z)=h^3(z)=\left(\cos(2z)-1\right)^3$

كما أن هذه النقاط هي أصفار من الدرجة الثالثة لـ $g_1(z)$ وذلك لأن:

$$g_1(z)\,|_{z=n\pi}=\sin(3n\pi)-3\sin(n\pi)=0$$
$$g_1'(z)\,|_{z=n\pi}=3\cos(3n\pi)-3\cos(n\pi)=0$$
$$g_1''(z)\,|_{z=n\pi}=-9\sin(3n\pi)+3\sin(n\pi)=0$$
$$g_1'''(z)\,|_{z=n\pi}=-27\cos(3n\pi)+3\cos(n\pi)=\begin{cases}\overbrace{-27+3\neq 0}^{n\ \text{زوجي}} ;\\ \underbrace{-27-3\neq 0}_{n\ \text{فردي}} ;\end{cases}$$

إذاً $z=n\pi$ هي أقطاب من الرتبة (6-3) للدالة $f(z)=\dfrac{g_1(z)}{g_2(z)}$.

تمرين8:

أوجد متسلسلة لورانت للدالة : $f(z)=\dfrac{z^2-2z+3}{z-2}$ في المنطقة $|z-1|>1$, ومن هذا النشر عين وضع نقطة اللانهاية بالنسبة لهذه الدالة.

الحل:

$$|z-1|>1\Rightarrow\left|\frac{1}{z-1}\right|<1$$

وبالتالي نكتب الدالة $f(z)$ على الشكل التالي:

$$f(z)=\frac{(z-1)^2+2}{(z-1)-1}=\frac{1}{(z-1)}\left[\frac{2+(z-1)^2}{1-\frac{1}{z-1}}\right]=\frac{1}{(z-1)}\left(2+(z-1)^2\right)\left[\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{(z-1)}\left(2+(z-1)^2\right)\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\dots\right]==$$

$$=\frac{1}{(z-1)}\left[2+\frac{2}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}+\dots+(z-1)^2+(z-1)+1+\frac{1}{z-1}+\dots\right]$$

$$=\frac{1}{(z-1)}\left[(z-1)^2+(z-1)+3+\frac{3}{z-1}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{3}{(z-1)^3}+\dots\right]$$

$$=\left[(z-1)+1+3+\frac{3}{z-1}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{3}{(z-1)^3}+\frac{3}{(z-1)^4}\dots\right]$$

تمرين9:

حدد وضع نقطة اللانهاية للدالة : $f(z)=\frac{z^2}{e^{\frac{1}{z}}-1}$.

<u>الحل:</u>

من أجل المطلوب نجري التحويل التالي $z=\frac{1}{t}$ فيكون: $\phi(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2(e^t-1)}$

ولندرس وضع النقطة $t=0$ بالنسبة للدالة $\phi(t)$.

$$\lim_{t\to 0}\phi(t)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2\left(e^t-1\right)}=\infty$$

كما أن :

$$\lim_{t\to 0}t\phi(t)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t\left(e^t-1\right)}=\infty$$

$$\lim_{t\to 0}t^2\phi(t)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(e^t-1\right)}=\infty$$

$$\lim_{t\to 0}t^3\phi(t)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\left(e^t-1\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{e^t}=1\neq\infty$$

إذاً $t=0$ هي قطب من الرتبة الثالثة للدالة $\phi(t)$, وبالتالي تكون $z=\infty$ قطب من الرتبة الثالثة للدالة $f(z)$.

تمرين10:

أوجد النقاط الشاذة للدالة : $f(z)=z.e^{\frac{3}{z}}$ محدداً نوعها. ثم حدد نوع نقطة اللانهاية بطريقتين.

الحل:

النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي النقطة $z=0$. وهي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ ، لأنها قطب بسيط للدالة $g(z)=\frac{3}{z}$ فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{g(z)}$ وبالتالي للدالة $f(z)$.

من أجل نقطة اللانهاية : نلاحظ أن نشر الدالة $f(z)$ في المنطقة $|z|<\infty$ يعطى بالشكل:

$$f(z)=z\left[1+\frac{3}{1!}\;\frac{1}{z}+\frac{3^2}{2!}\;\frac{1}{z^2}+\frac{3^3}{3!}\;\frac{1}{z^3}+\dots\right]$$

$$=z+\frac{3}{1!}\;+\frac{3^2}{2!}\;\frac{1}{z}+\frac{3^3}{3!}\;\frac{1}{z^2}+\dots$$

وبما أن الجزء التحليلي لهذا النشر يتكون من عدد منته من الحدود ودرجة أكبر حد هي 1.

إذاً تكون $z=\infty$ قطب بسيط للدالة $f(z)$.

طريقة أخرى: نأخذ الدالة $\phi(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$. ونتابع كما تعلمنا سابقاً.

تمرين11:

ما هو وضع النقطتين $z=0$ و $z=\infty$ بالنسبة للدالة : $f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+z+z^2$.

الحل:

إن نشر لورانت للدالة $f(z)$ السابقة في جوار الصفر وفي جوار اللانهاية يعطى بشكل الدالة نفسها , وبما أن الجزء الرئيسي من هذا النشر يتكون من عدد منته من الحدود ودرجة أكبر حد هي 2 , عندئذٍ نستنتج أن $z=0$ هي قطب من الرتبة الثانية بالنسبة للدالة $f(z)$.

كما أن الجزء التحليلي من هذا النشر يتكون من عدد منته من الحدود ودرجة أكبر حد هي 2 أيضاً , وبالتالي تكون $z=\infty$ قطب من الرتبة الثانية للدالة $f(z)$.

تمرين12:

ما هو نوع النقطة الشاذة $z=2$ بالنسبة للدالة $f(z)=\frac{z}{z-2}.e^{\frac{z+3}{z-2}}$.

الحل:

لنأخذ الدالة $g(z)=\dfrac{z+3}{z-2}$ فنلاحظ أن $\lim\limits_{z\to 2} g(z)=\infty$. إذاً $z=2$ هي قطب بالنسبة للدالة $g(z)$, وبالتالي هي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{g(z)}$ وبالتالي هي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$.

تمرين13: (وظيفة).

أوجد النقاط الشاذة للدالة $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)(z^3-1)}$ وحدد نوعها.

تمرين1:

بين نوع النقطة $z=3$ للدالة $f(z)=(z^3-9z^2+27z-27)e^{\frac{z}{z-3}}$ ثم حدد قيمة الراسب لهذه الدالة عند هذه النقطة. ثم استنتج قيمة الراسب لهذه الدالة عند نقطة اللانهاية.

الحل:

إن النقطة $z=3$ هي قطب للدالة $g(z)=\dfrac{z}{z-3}$ فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{g(Z)}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$.

لإيجاد قيمة الراسب للدالة $f(z)$ في جوار النقطة الشاذة, نلاحظ أن :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-3)^3 e^{\frac{z-3+3}{z-3}} = (z-3)^3 e^{1+\frac{3}{z-3}} \\ &= e(z-3)^3 e^{\frac{3}{z-3}}\ ;\ 0<|z-3|<\infty \\ &= e(z-3)^3\left[1+\frac{3}{z-3}+\frac{3^2}{2!}\frac{1}{(z-3)^2}+\dots\right] \\ &= e(z-3)^3+3e(z-3)^2+\frac{3^2}{2!}e(z-3)+\frac{3^3}{3!}e+\frac{3^4}{4!}e\frac{1}{(z-3)}+\dots \end{aligned}$$

نلاحظ من هذا النشر أن :

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=3} f(z)=\frac{3^4}{4!}e$$

من هذا النشر نستنتج أن نقطة اللانهاية هي قطب من الرتبة الثالثة وقيمة الراسب عند هذه النقطة هو :

$$\underset{z=\infty}{\text{Res}}\ f(z)=-b_1=-\frac{3^4}{4!}e$$

تمرين2:

عين النقاط الشاذة للدالة : $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ ثم بين أنها أقطاب بسيطة, ثم أحسب قيمة الراسب لهذه الدالة عند كل قطب من الأقطاب .

الحل:

النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي جذور المعادلة $e^z-1=0$ وهي النقاط:

$$z=2n\pi i\ ;\ n=0,\pm 1,\pm 2,...$$

وهي أصغار من الدرجة الأولى للدالة e^z-1 لأن :

$$\left.\left(e^z-1\right)'\right|_{z=2n\pi i}=1\neq 0$$

إذاً هي أقطاب بسيطة للدالة $f(z)$ وقيمة الراسب عند هذه النقاط هي :

$$\underset{z=2n\pi i}{\text{Res}}\ f(z)=\frac{1}{\left.\left(e^z-1\right)'\right|_{z=2n\pi i}}=\frac{1}{1}=1$$

تمرين3:

أحسب قيمة الراسب للدالة $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3-2z^2+z}$ عند كل نقطة من النقاط الشاذة للدالة ثم احسب قيمة الراسب عند نقطة اللانهاية.

الحل:

إن الدالة تكتب على الشكل :

$$f(z)=\frac{e^z}{z^3-2z^2+z}=\frac{e^z}{z\left(z-1\right)^2}$$

وواضح من هذا الشكل أن النقاط الشاذة للدالة هي :

$z=0$ قطب بسيط (علل ذلك).

$z=1$ قطب ثنائي (علل ذلك).

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(z-1)'} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\underset{z=1}{\operatorname{Res}} f(z) = \frac{1}{(z-1)'} \lim_{z\to 1} \frac{e^z}{z} = \lim_{z\to 1} \frac{ze^z - e^z}{z^2} = 0$$

نعلم أن :

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) + \underset{z=1}{\operatorname{Res}} f(z) + \underset{z=\infty}{\operatorname{Res}} f(z) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\underset{z=\infty}{\operatorname{Res}} f(z) = -1$$

تمرين4:

بين وضع النقطة $z=0$ للدالة $f(z) = \dfrac{z^2}{\operatorname{ch} z - 1}$ ثم احسب قيمة الراسب لهذه الدالة عند النقطة $z=0$.

الحل:

إن النقطة $z=0$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح لأن :

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{\operatorname{ch} z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{2z}{\operatorname{sh} z} = \dots = \frac{2}{\operatorname{ch} 0} = 2$$

وبالتالي قيمة الراسب تساوي الصفر.

تمرين5:

أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z^3}$ على النطاق $0 < |z| < \infty$. ثم عين نوع النقطة $z=0$ واحسب قيمة الراسب عندها ثم بين نوع نقطة اللانهاية.

الحل:

$$f(z)=\frac{1}{z^3}(\sin 2z)=\frac{1}{z^3}\left(\frac{2}{1!}z-\frac{2^3}{3!}z^3+\frac{2^5}{5!}z^5-\dots\right)$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{2}{z^2}-\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5}{5!}z^2-\dots$$

يتضح من نشر لورانت بهذه الدالة أن النقطة $z=0$ هي قطب من الرتبة الثانية لأن الجزء الرئيسي للنشر يتكون من عدد منته من الحدود ورتبة أعلى حد هي 2 وبما أن : $b_1=0$

إذاً راسب الدالة $f(z)$ عند النقطة $z=0$ هي : $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=0$.

كما يتضح من هذا النشر أن نقطة اللانهاية هي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ وذلك كون الجزء التحليلي من هذا النشر يتكون من عدد غير منته من الحدود , وبما أن أمثال $\frac{1}{z}$ من هذا النشر فإن الراسب عند اللانهاية معدوم .

تمرين6:

أحسب قيمة التكامل في كل مما يلي:

$$I_1=\int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z)(z-2)^3}dz$$

$$I_2=\int_{|z|=2}\frac{1}{(z+1)^4(z^2-9)(z-4)}dz$$

$$I_3=\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^3}dz$$

$$I_4=\int_{|z-2i|=2}\frac{1}{e^z+1}dz$$

$$I_5=\int_{|z|=2}(2z-1)\cos\frac{z}{z-1}dz$$

الحل:

لحساب التكامل الأول , نأخذ الدالة : $f_1(z)=\frac{e^z}{(z)(z-2)^3}$.

إن النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ هي أصفار المقام وهي : $z=0$ قطب بسيط و $z=2$ قطب من الرتبة الثانية وكلاهما يقع داخل الكفاف $|z|=3$ وبالتالي لنحسب رواسب الدالة عند هذه النقاط :

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f_1(z) = \lim_{z\to 0} z\, f_1(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(z-3)^3} = -\frac{1}{8}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f_1(z) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 2} \frac{d2}{dz^2}\frac{e^z}{z} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\frac{ze^z - e^z}{z^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{z^3e^z - 2z(ze^z - e^z)}{z^4} = \frac{e^z}{8}$$

وبالتالي تكون قيمة التكامل الأول هي:

$$I_1 = 2\pi i\sum \operatorname{Res} f_1(z) = 2\pi i\left(-\frac{1}{8}+\frac{e^2}{8}\right) = \frac{(e^2-1)\pi i}{4}$$

لحساب التكامل الثاني , نأخذ الدالة : $f_2(z) = \dfrac{1}{(z+1)^4(z^2-9)(z-4)}$.

إن النقاط الشاذة لهذه الدالة هي:

$z=-1$ وهي قطب من الرتبة الرابعة . $z=3$ وهي قطب بسيط . $z=-3$ وهي قطب بسيط . $z=4$ قطب بسيط.

ولكن فقط النقطة $z=-1$ تقع داخل الكفاف $|z|=2$, ولنحسب الراسب عند هذه النقطة:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f_2(z) = \operatorname*{Res}_{z=\infty} f_2(z) - \operatorname*{Res}_{z=3} f_2(z) - \operatorname*{Res}_{z=-3} f_2(z) - \operatorname*{Res}_{z=4} f_2(z).$$

إن نقطة اللانهاية هي صفر من الدرجة السابعة لذا فإن:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f_2(z) = 0$$

كما أن:

$$\operatorname*{Res}_{z=-3} f_2(z) = \lim_{z\to -3}(z+3)f_2(z) = \lim_{z\to -3}\frac{1}{(z+1)^4(z-3)(z-4)} = \frac{1}{672}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f_2(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)\, f_2(z) = \lim_{z\to 3}\frac{1}{(z+1)^4(z+3)(z-4)} = -\frac{1}{1536}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=4} f_2(z) = \lim_{z\to 4}(z-4)\, f_2(z) = \lim_{z\to 4}\frac{1}{(z+1)^4(z^2-9)} = \frac{1}{4375}$$

$$\Rightarrow I_2 = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=-1} f_2(z)\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{672}+\frac{1}{1536}-\frac{1}{4375}\right) = \dots$$

لحساب التكامل الثالث , نأخذ الدالة : $f_3(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}$, إن النقاط الشاذة لهذه الدالة هي:

$z=0$ وهي قطب من الرتبة الثالثة وتقع داخل الكفاف المعطى $|z|=2$ وبالتالي:

$$I_3 = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f_3(z) = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f_3(z)\right)$$

ولكن : $\operatorname*{Res}_{z=0} f_3(z) = \dfrac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\dfrac{d2}{dz^2}\cos z = \dfrac{1}{2!}\left(-\cos z\right)\Big|_{z=0} = -\dfrac{1}{2}$

وبالتالي:

$$I_3 = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

لحساب قيمة التكامل الرابع نأخذ الدالة: $f_4(z) = \dfrac{1}{e^z+1}$, إن النقاط الشاذة لهذه الدالة

هي جذور المعادلة $e^z=-1$ أي أنها النقاط :

$z=(2n+1)\pi i\ ;\ n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$, وهي أقطاب بسيطة , ولنرى أي هذه النقاط

يقع داخل الكفاف المعطى: $|z-2i|=2$.

من أجل $n=0$ نجد $z=\pi i \Leftarrow |\pi i-2i|<2$ والنقطة تقع داخل الكفاف.

من أجل $n=1$ نجد $z=3\pi i \Leftarrow |3\pi i-2i|>2$ والنقطة تقع خارج الكفاف.

من أجل $n=-1$ نجد $z=-\pi i \Leftarrow |-\pi i-2i|>2$ والنقطة تقع خارج الكفاف.

وبالتالي توجد لدينا نقطة وحيدة تقع داخل الكفاف هي النقطة $z=\pi i$ ولنوجد قيمة الراسب عند هذه النقطة :

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi i} f_4(z) = -1$$

وبالتالي نجد قيمة التكامل الرابع:

$$I_4 = 2\pi i(-1) = -2\pi i$$

لحساب التكامل الخامس نأخذ الدالة : $f_5(z) = (2z-1)\cos\dfrac{z}{z-1}$.

لهذه الدالة نقطة شاذة وحيدة هي النقطة $z=1$ وهي نقطة شاذة أساسية لهذه الدالة وتقع داخل الكفاف المعطى $|z|=2$ ويتضح هذا من نشر هذه الدالة في جوار النقطة $z=1$:

$$f_5(z) = [2(z-1)+1]\left[\begin{array}{l} \cos 1 - \dfrac{\cos 1}{2!}\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^2 + \dfrac{\cos 1}{4!}\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^4 - \dots \\ - \dfrac{\sin 1}{(z-1)} + \dfrac{\sin 1}{3!}\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^3 - \dfrac{\sin 1}{5!}\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^5 + \dots \end{array}\right]$$